Umm Al-Qura Univ. J. App. Sci. Vol.1, No. 1, pp. 21-44 (2009) 28-11-141 © The University Press

دراسة عن حساب التغيرات وبعض تطبيقاته

فالح بن عمران محمد الدوسري

قسم العلوم الرياضية – كلية العلوم التطبيقية – جامعة أم القرى- ص.ب. ٧١٥ – المملكة العربية السعودية

Survey on Calculus of Variations and Some of its Applications

Faleh O. M. Al-Dosary

Department of Mathematical Sciences - Faculty of Applied Sciences - Umm Al-Qura University
Makkah - Saudi Arabia

The calculus of variations has been one of the major branches of analyses for more than two centuries concerned with certain maximum or minimum problems. It is a tool of great power that can be applied to a wide variety of problems in Mathematics, Physics, Engineering and Control Theory. Some of the problems of calculus of variations have a long history going back to ancient times, but the systematic study of variational problems dates from the eighteenth century with the work of Euler (1707-1793) and Lagrange (1736-1813).

In this article we give the history of this subject with some applications in Mathematics, Analytical and Quantum Mechanics.

ملخص

لقد اهتم حساب التفاضل والتكامل بالقيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال، لكثرة تطبيقاتها، لكنه لا يمكن أن يعلمنا عن ماهية اقل مسافة بين نقطتين معلومتين في مستوٍ، أو اقصر مسافة بين نقطتين معلومتين على سطح معلوم أو أقل زمن يستغرقه جسيم للتحرك من نقطةٍ إلى أخرى على سطح معين، أو عن شكل المنحنى المغلق ذو المحيط المعلوم الذي يحد اكبر مساحه ممكنه ولا عن شكل المنحنى الذي ينزلق عليه جسيم في اقل زمن ممكن. وللإجابة عن تلك الأسئلة، وإيجاد فرع من الرياضيات يضع الحلول المناسبة لمثل تلك المسائل التي حل بعضها الرياضيان السويسريان يوحنا برنولي (١٦٦٧م – ١٧٤٨م) ويعقوب برنولي (١٦٥٤م- ١٧٠٥م)، وكذلك الألماني ليبنز (١٦٤٦م-١٧١٦م)، والانجليزي نيوتن (١٦٤٢م- ١٧٢٧م)، والفرنسي لوبتال (١٦٦١م- ١٧٠٤م) فقد وضع السويسري اويلر (١٧٠٧م- ١٧٨٣م) أساسيات هذا الفرع من التحليل الرياضي معرفاً ما يسمى الداليات "Functional" أي دوال من مجموعه الدوال أو من فضاء متري إلى مجموعه الأعداد الحقيقية"، وأوجد الشرط الضروري (معادله أو معادلات اويلر) لوجود القيم القصوى والتي أدت إلى حل أمثال تلك المسائل وغيرها في الميكانيكا التحليلية والمرونة وميكانيكا الكم، وبعد أن نشر أويلر أبحاثه في هذا المجال عام ١٧٤١م، ودراسة الفرنسي لاجرانج (١٧٣٦م – ١٨١٣م) لتلك الأبحاث توصل لاجرانج سنة ١٧٥٥م إلى نفس الشروط بطريقه أخرى "ولهذا السبب يسمي البعض معادله اويلر، معادله اويلر ـــ لاجرانج"، وأرسل ذلك الى اويلر فأعجب بها وسماها حساب التغييرات،

والتي أصبحت عنواناً لهذا الفرع من التحليل الرياضي المهتم بالقيم القصوى للداليات، والذي تطور، وحل الكثير من المشاكل في الرياضيات والفيزياء و وضعت شروط ضرورية وكافيه أخرى لوجود القيم القصوى من قبل الفرنسي لجندر (١٧٥٢م — ١٨٣٣م)، والألمانيان، جاكوبي (١٨٠٤م — ١٨٥١م)، وفيرشتراس (١٨١٥ — ١٨٩٧م) وبعد ظهور نظريه التحكم (Control Theory)، استخدم حساب التغييرات لاستنتاج معادله بلمان التي قدمت أسلوبا آخراً لاشتقاق معادله هاملتون كما استخدم حساب التغيرات من قبل الروسي بونترياجن لحساب دوال التحكم وإيجاد الشروط الضرورية للتحكم الأقصى.

وهدفنا في هذا المقال تزويد القارئ بمقدمه بسيطة عن هذا الموضوع وبعض تطبيقاته.

١: الداليات وابسط مسائل التغيرات:

تعريف ١-١:

إذا كانت $\mathbb{F}$ مجموعة الدوال أو فضاء متري وكانت $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية فتسمى الدالة $J:\mathbb{F}\to\mathbb{R}$ دالي (Functional).

إذاً الدالي هو دالة تقرن كل داله أو منحني بعدد حقيقي وللداليات صور مختلفة تبعاً لمتغيراتها نذكر منها ما يلي:

$$\int_a^b F(x)\,dx \qquad , \qquad J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,dx$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}]\,dx$$

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F[x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n]\,dx$$

والآن إلى بعض الحقائق الأساسية المتعلقة بالداليات الخطية المتصلة والقضايا الآتية، والتي أثبتت عام ١٨٧٩م من قبل الرياضي الألماني باول ديو بوا ريموند (Paul Du Bois Reymon) (١٨٣١-١٨٨٩م)

<u>قضيه ١-١</u>: (اويلر ـــــ لاجرانج)

إذا كانت $\alpha(x)$ داله متصلة على الفترة $[a,b]$ ، وكان $\int_a^b \alpha(x) f(x)\,dx = 0$ لكل $f(x) \in \ell$ حيث ℓ فضاء الدوال المتصلة على $[a,b]$ كما أن $f(a) = f(b) = 0$ ، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$

البرهان:

إذا أثبتنا أن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$، فأن اتصال $\alpha(x)$ على $[a,b]$ يؤدي إلى كون $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$، لذا نفرض أن $\alpha(x^*) \neq 0$، $x^* \in (a,b)$. إذاً إما $\alpha(x^*) > 0$ أو $\alpha(x^*) < 0$، ويكفي أن نثبت القضية عندما $\alpha(x^*) > 0$ لأنه إذا كانت $\alpha(x^*) < 0$، فإن $-\alpha(x^*) > 0$، بما أن $\alpha(x)$ مستمرة بالفرض، إذاً $\alpha(x) > 0$ لكل $x \in (c,d)$ حيث c، d إعداد حقيقية تحقق العلاقة $a<c<x^*<d<b$ وعليه إذا كانت:

$$f^*(x)=\begin{cases}(x-c)\,(d-x) & \forall\ x\in[c,d]\\ 0 & \forall\ x\in[a,b]-[c,d]\end{cases}$$ ،

فإن $f^* \in \ell$، كما أن $f^*(c) = f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = 0$

إذاً $\int_c^d \alpha(x)\,(x-c)\,(d-x)\,dx = 0$

لكن $\alpha(x) > 0$ بالفرض، $(x-c) > 0\ ,\ (d-x) > 0$

إذاً $\alpha(x)\,(x-c)\,(d-x) > 0$ لكل $x \in (c,d)$

،وعليه فإن $\int_c^d \alpha(x)\,(x-c)\,(d-x)\,dx > 0$ وهذا تناقض.

إذاً:

$$\alpha(x) = 0 \quad \text{لكل} \quad x \in [a,b]$$

ملاحظه: يمكن تعميم القضية (١-١) كالآتي:

إذا كانت $\alpha(x)$ داله متصلة على $[a,b]$، وكان $\int_a^b \alpha(x)\,f(x)\,dx = 0$ لكل $f(x) \in \mathbb{D}_n$ بحيث أن $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$ لكل $r \in \mathbb{N}$، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a,b]$.

ولإثبات تلك العبارة نتبع نفس البرهان في قضية (١-١)، وجعل

$$f^*(x)=\begin{cases}(x-c)^{n+1}\ (d-x)^{n+1} & \forall\ x\in[c,d]\\ 0 & \forall\ x\in[a,b]-[c,d]\end{cases}$$

نحصل على المطلوب.

والآن إلى ما يعرف بمعادلة أويلر- لاجرانج التي تؤدي إلى معرفة القيم الحرجة أو قيم الثبات للداليات.

مبرهنة ١-٢:

لتكن $\mathbf{D}_1$ المجموعة الجزئية من ℓ المكونة من جميع الدوال التي مشتقاتها الأولى متصلة على $[a,b]$.

إذا كان للدالي $J(y)=\int_a^b F(x\,,y\,,y')\,dx\in \mathbf{D}_1$، حيث $y(a)=A\,,\,y(b)=B$ قيمه قصوى على المنحني $y(x)$، فإن:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad \ldots (1)$$

أي أن الشرط الضروري لامتلاك $J(y)$ قيماً قصوى عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ للمعادلة التفاضلية (١).

البرهان:

بما أن $\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y'\right)dx$. إذاً:

$$\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\Delta y\;dx+\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y'\,dx$$

لكن بالتكامل بالتجزئة، نجد أن:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y'\;dx=\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\Delta y\;dx$$

وحيث أن $\Delta y(a)=\Delta y(b)=0$، إذاً:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\Delta y'\;dx=-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\Delta y\;dx\text{،}$$

وعليه فإن:

$$\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\Delta y\;dx$$

لكن للدالي $J(y)$ قيمه قصوى عند $y=y(x)$، إذاً $\delta J(y,\Delta y)=0$، وعليه فإن $\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\Delta y\,dx=0$، لكن Δy داله متصلة على $[a,b]$، إذاً $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ حسب قضية (١-١).

تُعرف المعادلة (١) بمعادلة اويلر نسبة للرياضي اويلر الذي توصل إليها عام ١٧٤١م، وبعد دراسة لانجرانج لأعمال اويلر توصل عام ١٧٥٥م إلى نفس المعادلة بطريقة أخرى وكان عمره ١٩ سنه فأرسل ذلك إلى اويلر الذي اثنى عليه كثيراً وأطلق على تلك الطريقة حساب التغيرات ، ولهذا السبب تسمى المعادلة (١) بمعادلة اويلر ـــ لانجرانج ، والتي تساعد على إيجاد القيم القصوى وقيم التوقف أو الثبات للداليات.

ملاحظه: حيث أن $\frac{\partial F}{\partial y} = Fy,\ \frac{\partial F}{\partial y'} = Fy'$ ، $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{xy'} + F_{yy'} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y''$ إذاً معادلة اويلر ـــ لاجرانج هي

$$\left(F_{y'y'}\right) \cdot y'' + \left(F_{yy'}\right) \cdot y' + \left(F_{xy'}\right) - F_y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ، تُسمى منحنيات تكاملاتها $y = (y, x, C_1, C_2)$ المنحنيات الحرجة أو منحنيات التوقف والتي قد تكون منحنيات قيم قصوى للدالي $J(y)$.

والآن إلى بعض التطبيقات والأمثلة الآتية:

مثال ١-١:

أوجد طول اقصر منحن يصل بين النقطتين $(-1,-2)$ ، $(2,7)$.

الحل

بما أن $J[y(x)] = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ ، $y(-1) = -2$ ، $y(2) = 7$ ، إذاً: $F = \sqrt{1+y'^2}$ ، وعليه فإن معادلة أويلر ـ لاجرانج هي $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$. ومنها نجد أن $F_{y'} = C$ ، وبالتالي فإن $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ ، وعليه فإن $y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = m$ إذاً $y = mx + b$. لكن $y(-1) = -2$ و $y(2) = 7$ إذا $m = 3$ ، $b = 1$ وعليه فإن اقصر منحني هو المستقيم $y = 3x + 1$.

مثال ١-٢ :

أوجد معادله المنحني المار بالنقطتين $(a\ ,\ A)$ ، $(b\ ,\ B)$ والذي إذا دار حول محور السينات ولّد سطحاً مساحته اقل ما يمكن.

الحل:

بما أن $S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$. إذاً $F = F(y, y')$ وعليه فإن

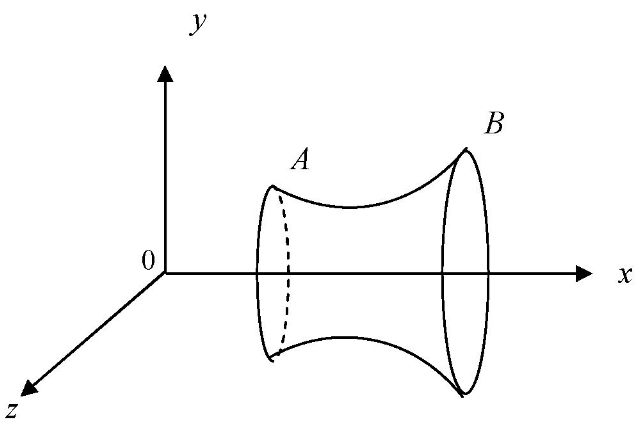
$F - y'F_{y'} = C$ ، وبالتالي فإن $y \sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \dfrac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ وعليه فإن:

$\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ ، ولحل هذه المعادلة نفرض أن:

$$y' = Sinh\, t \quad ، \text{ إذاً } \quad y = C\sqrt{1+y'^2} = C\, Cosh\, t$$

وحيث أن $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ، إذاً $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{C\, Sinh\, t}{Sinh\, t}\, dt = C\, dt$ ، وعليه فإن:

$x = Ct + C_1$. إذاً $t = \dfrac{x - C_1}{C}$ ، وبالتالي فإن $y = C\, Cosh\left(\dfrac{x - C_1}{C}\right)$ وهذه المعادلة تمثل عائلة من منحنيات السلسلة (الكاتينة) ودورانها يعطي سطوح يسمى كل منها سطح سلسلي الشكل أو كاتينة $(Catenoid)$ والثابتان C_1 , C_2 يمكن تعينهما طبقاً للشروط الحدية والتي تعتمد على موضع النقط A، B. انظر الشكل (١-١)



شكل (١-١)

مثال١-٣ : " مسألة منحني أقصر زمن "

وهي مسألة إيجاد منحني الذي إذا انزلق عليه جسم كتلته m بدون احتكاك من $A\ (0\ ,\ 0)$ إلى $B = (b\ ,\ y_1)$ استغرق اقل زمن ممكن . ولإيجاد ذلك المنحني لاحظ أن عند أية لحظه وأي نقطه $(x\ ,\ y)$ نجد أن الطاقة الحركية للجسم تساوي الطاقة الكامنة له ، وهذا يعني أن:

$\frac{1}{2}\, mv^2 = m\,g\,y$ وعليه فإن $v = \sqrt{2\,g\,y}$ ، لكن $v = \frac{ds}{dt}$ ، $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

إذاً $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\,g\,y}$ ، وبالتالي فإن $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}\ dx}{\sqrt{y}}$ ،

إذاً:

$$t[y_1] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, dx \ ،\ y(0) = 0 \ ،\ y(b) = y_1$$

وعليه فإن $1 + y'^2 = \frac{1}{C\,y}$ ، وهذا يعني أن $y' = \sqrt{\frac{1 - Cy}{C\,y}}$ ، ومنها نجد أن:

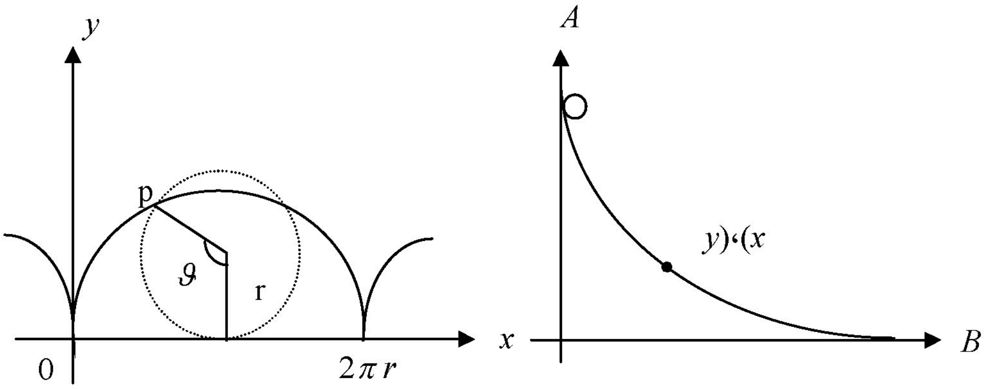
$dx = \sqrt{\frac{Cy}{1 - Cy}}\, d\,y$ ، والآن افرض أن $1 - 2C\,y = Cos\,\vartheta$

نجد أن $C\,y = \frac{1 - Cos\,\vartheta}{2}$ ، $d\,y = \frac{1}{2C}\, Sin\,\vartheta\ d\vartheta$ وعليه فإن:

$$x = \frac{1}{2C}\int \sqrt{\frac{1 - Cos\,\vartheta}{1 + Cos\,\vartheta}} \cdot Sin\,\vartheta\ d\vartheta = \frac{1}{2C}\int \sqrt{\frac{1 - Cos\,\vartheta}{1 + Cos\,\vartheta} \cdot \frac{1 - Cos\,\vartheta}{1 - Cos\,\vartheta}} \cdot Sin\,\vartheta\ d\vartheta$$
$$= \frac{1}{2C}\int (1 - Cos\,\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2C}\,(\vartheta - Sin\,\vartheta) + C_2$$

وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\, Cos^{-1}(1 - 2c\,y) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2} + c_2$ ، لكن $y(0) = 0$ إذاً $C_2 = 0$ وعليه فإن $x = \frac{1}{2C}\, Cos^{-1}(1 - 2c\,y) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2}$ وهي معادله (Cycloid)، لأن $x = \frac{1}{2C}(\vartheta - Sin\,\vartheta)$ ، $y = \frac{1}{2C}(\vartheta - Cos\,\vartheta)$ تمثلان معادلة (Cycloid)

انظر شكل (١-٢).



$$x = r(\vartheta - \sin\vartheta)$$
$$y = r(1 - \cos\vartheta)$$

شكل (١ – ٢)

٢ : مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة وبعض تطبيقاتها

يضم هذا الجزء دراسة قيم التوقف "المنحنيات الحرجة" للداليات ذات التكاملات المضاعفة أو المتعددة (multiple integrals) ، وإعطاء بعض التطبيقات المهمة كإيجاد معادله الحركة لسلك متذبذب (مهتز) من الجهتين ، واشتقاق معادلتي لابلاس وشرو دنجر، أضافه إلى بعض التطبيقات الهندسية، فإذا كان:

$$J[z\,(x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\;dx\,dy \;\in\; \ell_2$$

حيث ℓ_2 مجموعه الدوال التي تكون مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية متصلة (مستمرة) على المنطقة المغلقة R، كما أن للدالة $z(x,y)$ قيم معرفه ومحدده على ∂R ، حيث ∂R هي حدود R ولتحديد شروط قيم التوقف (المنحنيات الحرجة)، نورد ما يلي:

<u>قضيه مساعده (٢-١)</u>

إذا كانت $f\,(x,y)$ داله متصلة على المنطقة المغلقة R، وكان $\iint_R f(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy = 0$ لكل $h\,(x,y) \in \ell_2$ ، كما أن $h\,(x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in \partial R$ ، فإن $f\,(x,y) = 0$ لكل $(x,y) \in R$.

البرهان :

نفرض وجود $(x^*, y^*) \in R$ بحيث أن $f\ (x^*, y^*) \neq 0$. إما $f > 0$ أو $f < 0$ ، فإذا كانت $f\ (x^*, y^*) > 0$ ، فان اتصال f على R يعني أن $f\ (x, y) > 0$ لكل $(x, y) \in B = \{(x, y) \in R |\ (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 \le r^2\} \subseteq R$ ،

وعليه فإذا كانت h^* داله معرفه على R كالآتي:

$$h^*\ (x - y) = \begin{cases} 0 & , \forall\ (x, y) \in R - B \\ (r^2 - [(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2])^3 & , \forall\ (x, y) \in B \end{cases}$$

فإن $h^* \in \ell_2$ كما ان $\iint_R f\ (x, y)\ h(x, y)\ dx\ dy = 0$ ، وهذا غير ممكن لأن $f\ (x, y)\ h^*\ (x, y) > 0$ لكل $(x, y) \in B$ ، وعليه فإن $f\ (x^*, y^*)$ لا يمكن أن تكون اكبر من الصفر، وبنفس الطريقة يمكن أن نثبت أن $f\ (x^*, y^*)$ لا يمكن أن تكون اصغر من الصفر ، وعليه فإن $f\ (x, y) = 0$ لكل $(x, y) \in R$.

والآن إلى المبرهنة الآتية التي تحدد شروط وجود قيم التوقف.

مبرهنة ٢-٢:

إذا كانت $Z\ (x, y)$ معرفه ومحدده على ∂R ، وكان للدالي

$$J[Z\ (x, y)] = \iint_R F\ (x, y, Z, Z_x, Z_y)\ dx\ dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على المنحني $Z(x, y)$ فإن F تحقق معادله اويلر ــ لاجرانج ، أي أن:

$$F_Z - \frac{\partial}{\partial x} F_{Z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{Z_y} = 0$$

البرهان:

بما أن:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(Z + \varepsilon\, \Delta Z)\ \Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \iint_R \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F\ (x, y, Z + \varepsilon\, \Delta Z, Z_x + \varepsilon\, \Delta Z_x, Z_y + \varepsilon\, \Delta Z_y)\ dx\ dy$$

$$= \iint_R (F_z\, \Delta Z + F_{z_x}\, \Delta Z_x + F_{z_y}\, \Delta Z_y)\ dx\ dy$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x, y) \in \partial R$ ،

$$\iint_R (F_{z_x}\Delta Z_x + F_{z_y}\Delta Z_y)dxdy = \iint_R [\frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x}\Delta Z) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y}\Delta Z)]dxdy - \iint_R (\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})dxdy$$

و باستخدام نظريه جرين التي تنص على أن:

$$\iint_R (\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y})\ dx\ dy = \int_{\partial R} N\ dx + M\ dy$$

نجد أن:

$$\iint_R (F_{z_x}\Delta Z_x + F_{z_y}\Delta Z_y)dxdy = \int_{\partial R}(F_{z_x}\Delta Z\, dy - F_{z_y}\Delta Z\, dx) - \iint_R (\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})\Delta z\ dx\, dy$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x, y) \in \partial R$ ، إذاً:

$$\int_{\partial R}(F_{z_x}\Delta Z\, dy - F_{z_y}\Delta Z\, dx) = 0$$

وعليه فإن:

$$\iint_R (F_{z_x}\Delta Z_x + F_{z_y}\Delta Z_y)dxdy = -\iint_R (\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})\Delta z\ dx\, dy$$

وبالتالي فإن:

$$\delta J = \iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})\Delta z\ dx\, dy$$

لكن للدالي J قيمه قصوى على $Z(x, y)$ ، إذاً $\delta J = 0$ ، وعليه فإن:

$$\iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})\Delta z\ dx\, dy = 0$$

لكن $F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}$ داله مستمرة (متصلة) على R. كما أن $\Delta Z = 0$ لكل $(x, y) \in \partial R$ ، إذاً حسب القضية المساعدة (٢-١).

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y} = 0$$

ملاحظه

(١) إذا كان للدالي

$$J[u] = \int_R \dots \int F(x_1, \dots, x_n, \dots, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})\ dx_1 \dots dx_n \in \ell_2$$

وكان للدالة $u(x_1,\dots,x_n)$ ، قيماً محدده في ∂R ، وللدالي $J[u]$ قيمه قصوى على $u(x_1,\dots,x_n)$ فإن معادله اويلر ــ لاجرانج هي

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i'}} = 0$$

(٢) إذا كان للدالي

$$J[Z,w] = \iint_R F(x,y,z,w,z_x,z_y,w_x,w_y)\ dx\ dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $Z(x,y)$ ، $w(x,y)$ ، فإن معادلتي اويلر ــ لاجرانج هما:

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} = 0 \quad ، F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

وبصوره عامه إذا كان للدالي

$$J[u,v] = \int_R \dots \int F(x_1,\dots,x_n,\dots,u,v,u_{x_1},\dots,u_{x_n},v_{x_1},\dots,v_{x_n})dx_1 \dots dx_n \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $u(x_1,\dots,x_n)$ ، $v(x_1,\dots,x_n)$ فإن معادلتي اويلر ــ لاجرانج هما

$$F_v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{v_{x_i}} = 0 \quad ، \quad F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٣) إذا كان للدالي

$$J[z\ (x,y)] = \iint_R F(x,y,z,z_x,z_y)\ dx\ dy$$

قيمه قصوى بشرط أن:

$$K[z\ (x,y)] = \iint_R G(x,y,z,z_x,z_y)\ dx\ dy = A$$

فإن معادله اويلر ــ لاجرانج للدالي

$$S[z\ (x,y)] = \iint_R (F + \lambda G)\ dx\ dy$$

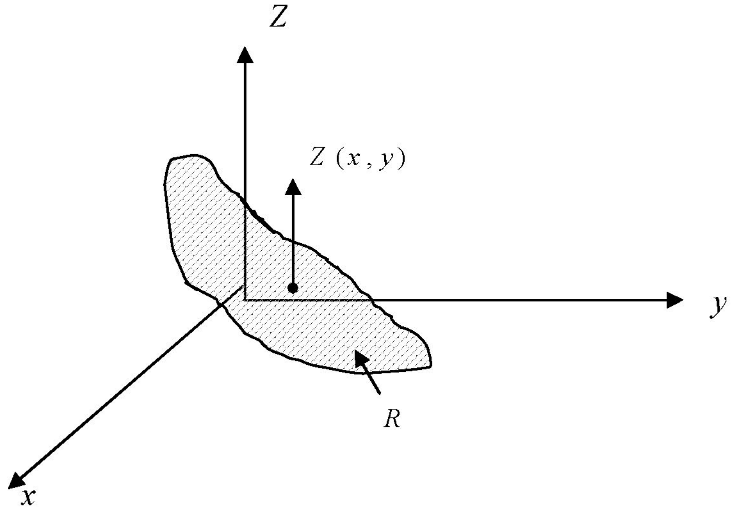
هي:

$$F_z + \lambda G_z - \frac{\partial}{\partial x}(F_{z_x} + \lambda G_{z_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{z_y} + \lambda G_{z_y}) = 0$$

والآن إلى بعض التطبيقات والأمثلة الآتية.

مثال ٢-١ : "اصغر سطح "Minimal surface Plateau's Problem

لإيجاد سطح $Z(x,y)$ متولد من منحني مغلق "انظر الشكل (٢-١)" مساحته $S = \iint_R \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}\, dx\, dy$ اقل ما يمكن.



شكل (٢-١)

لاحظ أن معادله اويلر ــ لاجرانج هي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Z_x}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Z_y}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}}\right) = 0$$

أو:

$$Z_{xx}(1 + Z_y^2) - 2 Z_x Z_y Z_{xy} + Z_{yy}(1 + Z_x^2) = 0$$

وهي م٢-٢: تفاضلية جزئيه لأصغر سطح وحل مثل تلك المعادلة معقد جداً لذلك نستخدم الهندسة التفاضلية في هذا المجال لتحديد معدل التقوس (mean curvature) لذلك السطح ، فأن كان التقوس صغيراً كان ذلك السطح ذو اقل مساحه ممكنه ، هذا ونود أن نشير إلى أن لانجرانج هو أول من درس السطوح ذات اقل مساحه ممكنه، إما النظرية العامة لمثل تلك السطوح فتعود إلى الفيزيائي البلجيكي الأعمى بلاتو (١٨٠١ — ١٨٣٣م) الذي حدد الكثير من خواص تلك السطوح من خلال تجاربه على فقاعات الصابون ، لأن مثل تلك السطوح يمكن تكوينها من إدخال سلك رفيع له شكل المنحنى المغلق في سائل صابون ثم رفعه منه.

مثال ٢-٢ :

إذا كان: $$J[Z(x,y)] = \iint_R [Z_x^2 + Z_y^2 + 2Z f(x,y)]\, dx\, dy$$

فإن معادله اويلر ـــ لاجرانج هي

$$Z_{xx}^2 + Z_{yy}^2 = f(x,y)$$

وهذه هي معادله بواسون (١٧٨١ — ١٨٤٠م) التي تستخدم في الفيزياء الرياضية .

مثال ٢-٣:

إذا كان

$$J[u(x,y,z)] = \iiint_R (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dx\, dy\, dz$$

فإن معادله اويلر ـــ لاجرانج للدالي $J[u]$ هي

$$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 = 0$$

وهي معادله لابلاس (١٧٤٩ — ١) طول، التي يجب أن يحققها الجهد الكهربائي في فضاء خالي من الشحنات ، ولها أيضا تطبيقات عديدة في الفلك والهندسة التفاضلية والتوصيل الحراري ، وديناميكا الموائع، وغير ذلك من المسائل في الفيزياء الرياضية.

مثال ٢-٤:

سلك منتظم كتلته m لكل وحده طول ، مثبت (مشدود) بين حاملين $x = 0$ ، $x = s$ وتحت تأثير شد (توتر) ثابت k فإذا عُملت ذبذبات صغيره سعتها $u(x,t)$ ،

فإن الطاقة الحركية للسلك هي $T = \frac{1}{2} m \int_0^s u_t^2\, dx$ ، إما الطاقة الكامنة (طاقه الوضع) فهي:

$$V = \frac{1}{2} k \int_0^s u_x^2\, dx \text{ ،}$$

وعليه فإن:

$$J[z(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^s \left(\frac{1}{2} m\, u_t^2 - \frac{1}{2} k\, u_x^2\right) dx\, dt$$

حسب قاعدة هاملتون، ومنها نجد أن $F = \frac{1}{2} m\, u_t^2 - \frac{1}{2} k\, u_x^2$ ، وعليه فإن معادله اويلر ــ لاجرانج هي:

$$F_u - \frac{d}{dt}(F_{u_t}) - \frac{d}{dx}(F_{u_x}) = 0$$

ومنها نجد أن: $-m\,u_{tt} + k\,u_{xx} = 0$ وعليه فإن: $u_{tt} = a^2\,u_{xx}$ حيث $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ هي معادله حركه السلك، وهي معادله انتشار الموجات ببعد واحد.

مثال ٢-٥ : معادله شرو دنجر Schrödinger's Equation

يمكن اشتقاق معادله شرو دنجر في ميكانيكا الكم باستخدام حساب التغيرات كالآتي.

نفرض إن $H = -k\nabla^2 + V(x,y,z)$ حيث $k = \frac{h^2}{8\pi^2 m}$ ، m كتله الجسيم الذي تدرس حركته، h ثابت بلانك، V طاقه الوضع (الطاقة الكامنة) للجسيم، H مؤثر هاملتون (Hamilton Operator) أو مؤثر الطاقة (Energy Operator)، $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ولإيجاد داله Ψ بحيث إن للدالي

$$E = J[\Psi , \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* (H\ \Psi)\, dx\, dy\, dz \quad \dots (1)$$

قيمه قصوى بشرط أن:

$$G[\Psi , \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* \Psi\, dx\, dy\, dz = 1 \quad \dots (2)$$

حيث Ψ^* مرافق Ψ ، كما إن لكل من Ψ ، Ψ^* نفس القيم ونفس المشتقات عند الحدود المتقابلة أو أنها تنعدم على ∂R. لاحظ أن بالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\, dx = \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2} - \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx$$

$$= 0 - \int \Psi_x^* \cdot \Psi_x\, dx = -\int \Psi_x^* \cdot \Psi_x\, dx$$

إذاً:

$$\iiint_R \Psi^* (-k\nabla^2 + \mathrm{V})\Psi\, dx\,dy\,dz = \iiint_R [k(\nabla\Psi^*)\cdot(\nabla\Psi) + \Psi^*\Psi\mathrm{V}]\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_R [k(\Psi_x\Psi_x^* + \Psi_y\Psi_y^* + \Psi_z\Psi_z^*) + \Psi^*\Psi\mathrm{V}]\, dx\,dy\,dz \quad \dots (3)$$

ومن (2)، (3) نجد أن:

$$S[\Psi,\Psi^*] = \iiint_R [k(\Psi_x\Psi_x^* + \Psi_y\Psi_y^* + \Psi_z\Psi_z^*) + \Psi^*\Psi\mathrm{V} + \lambda\Psi\Psi^*]\, dx\,dy\,dz$$

وعليه فإن معادلات اويلر ــ لاجرانج هي:

$$F_{\Psi} - \frac{\partial}{\partial x}(F_{\Psi_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{\Psi_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_{\Psi_z}) = 0$$
$$F_{\Psi^*} - \frac{\partial}{\partial x}(F_{\Psi^*_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{\Psi^*_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_{\Psi^*_z}) = 0$$

وبالتالي فإن:

$$\mathrm{V}\,\Psi^* + \lambda\Psi^* - k\,[\Psi^*_{xx} + \Psi^*_{yy} + \Psi^*_{zz}] = 0 \qquad \dots (4)$$
$$\mathrm{V}\,\Psi + \lambda\Psi - k\,[\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}] = 0 \qquad \dots (5)$$

لكن:

$$H\Psi = -k\nabla^2\Psi + \Psi\mathrm{V}$$
$$= -k(\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}) + \Psi\mathrm{V}$$

إذاً (5) هي:

$$H\Psi = -\lambda\Psi \qquad \dots (6)$$

ولتحديد قيمه λ نضرب طرفي (6) في Ψ^* فنجد أن

$$H\Psi\Psi^* = -\lambda\Psi\Psi^*$$

وعليه فإن:

$$E = \iiint_R \Psi H \Psi^*\; dx\,dy\,dz = -\lambda \iiint_R \Psi\Psi^*\; dx\,dy\,dz = -\lambda$$

وبالتعويض في (6) نجد أن:

$H\Psi = E\Psi$ ، وهي معادله شرودنجر في ميكانيكا الكم.

٣-١: مسائل التغيرات للدالي $J[y]$ بنقاط إطراف متحركة:

يضم هذا الجزء تحديد الشروط اللازمة لوجود المنحنيات الحرجة للدالي $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ ، عندما تتحرك نقطتي طرفي المنحنيات $y(x)$ على المستقيمين المتوازيين $x = a$ ، $x = b$ ، انظر شكل (٣-١) ولتحديد تلك الشروط لاحظ أن:

$$\Delta J = J[y + \varepsilon\Delta y] - J[y]$$
$$= \int_a^b [F(x, y + \varepsilon\Delta y, y' + \varepsilon\Delta y') - F(x, y, y')]\, dx$$

إذاً:

$$\delta J = \int_a^b (F_y \, \Delta y \; + \; F_{y'} \, \Delta y') \; dx \qquad \ldots \; (1)$$

وبالتكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\delta J = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \; \Delta y(x) \; dx + [F_{y'} \, \Delta y(x)]_{x=a}^{x=b}$$

$$= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \; \Delta y(x) \; dx + F_{y'}|_{x=b} \;\; \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \; \Delta y(a) \qquad \ldots \; (2)$$

وعندما $\Delta y(a) \; = \; \Delta y(b) \; = \; 0$ ، نجد أن $\delta J = 0$ يعني أن:

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \; \Delta y(x) \;\; dx \;\; = 0$$

و بالتالي فإن $\qquad F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} \;\; = \;\; 0 \qquad \ldots \;\; (3)$ ، لكل $a < x < b$

إذاً لكي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمسألة التغيرات بنقاط إطراف متحركة، يجب أن يكون $y(x)$ منحني قيمة قصوى للدالي $J[y]$ ، وهذا يعني أن $y(x)$ يجب أن يحقق معادله اويلر ــ لاجرانج (3). لكن إذا كان $y(x)$ قيمه قصوى للتكامل في (2)، فإن $\delta J = 0$ يعني أن:

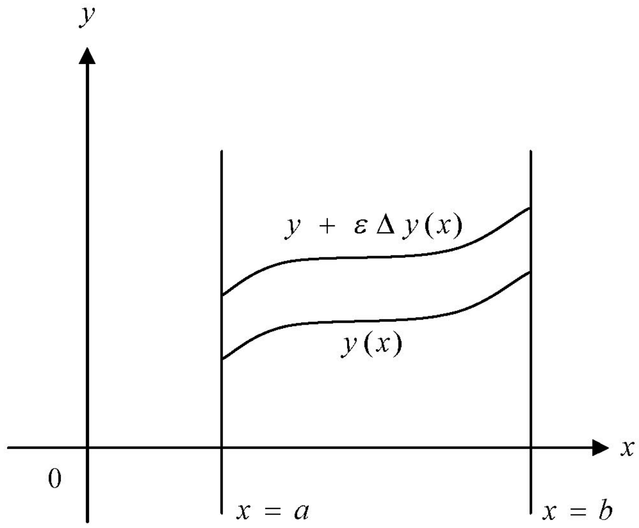
$$F_{y'}|_{x=b} \;\; \Delta y(b) \;\; - \;\; F_{y'}|_{x=a} \;\; \Delta y(a) \;\; = \;\; 0$$

ومنها نجد أن:

$$F_{y'}|_{x=a} \;\; \Delta y(a) \;\; = \;\; 0 \quad ، \; F_{y'}|_{x=b} \;\; \Delta y(b) \;\; = \;\; 0 \qquad \ldots \;\; (4)$$

لأن $\Delta y(x)$ داله اختياريه غير صفرية عند $a \, , \, b$.

إذاً لحل مسألة التغيرات بنقط إطراف متغيره ، يجب أولاً حل معادله اويلر ــ لاجرانج ثم استخدام الشرط (4) لتعيين الثوابت الإختبارية.



شكل (٣- ١) .

ملاحظه:

إذا كان $y(a) = A$ ، $y(b)$ متغيره ، فإن وجود قيمه قصوى للدالي $J[y]$ يعني أن:

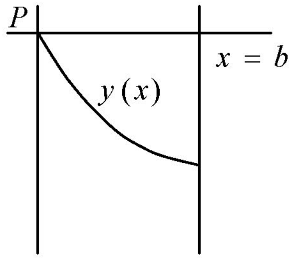
$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{لكل} \quad a \le x < b \quad \text{و} \quad F_{y'}|_{x=b} = 0$$

مثال ٣-١ :

انزلق جسم ثقيل من النقطة $P(a, A)$ إلى أسفل على منحني في مستوٍ رأسي. ما شكل المنحني الذي يحدده الجسم ليصل إلى الخط الرأسي $x = b$ ، $b \neq a$ في اقل زمن ممكن.

الحل:

نفرض أن نقطه الانطلاق منطبقة على نقطه الأصل للنظام الإحداثي $x\,y$ كما في شكل (٣-٢).



شكل (٣- ٢)

إذاً
$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \sqrt{1 + y'^2}\ \frac{dx}{dt}$$

وعليه فإن
$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}\, dx$$

لكن $\frac{1}{2} m v^2 = m g y$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية

إذاً $v = \sqrt{2gy}$ ، وعليه فإن $dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ ، وبالتالي فإن $t = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$

وعليه فإن $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ ، ومنها نجد أن معادله اويلر ـــ لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

تأخذ الشكل:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \quad ، \quad F_{y'}|_{x=b} = 0 \qquad \dots (1)$$

وحيث أن الحل العام لمعادله اويلر ـــ لاجرانج، هو:

$$x = r(\theta - Sin\theta) \quad ، \quad y = r(1 - Cos\theta)$$

وهو منحني دحروجي (cycloid). إذاً لتحديد r نستخدم الشرط $F_{y'}|_{x=b} = 0$ فنجد أن:

$$\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}|_{x=b} = 0$$

وعليه فإن $y'|_{x=b} = 0$ ، وبالتالي فإن المماس للمنحني $y(x)$ عند طرفه الأيمن مماس أفقي، وهذا يعني أن $\theta = \pi$ عندما $x = b$.

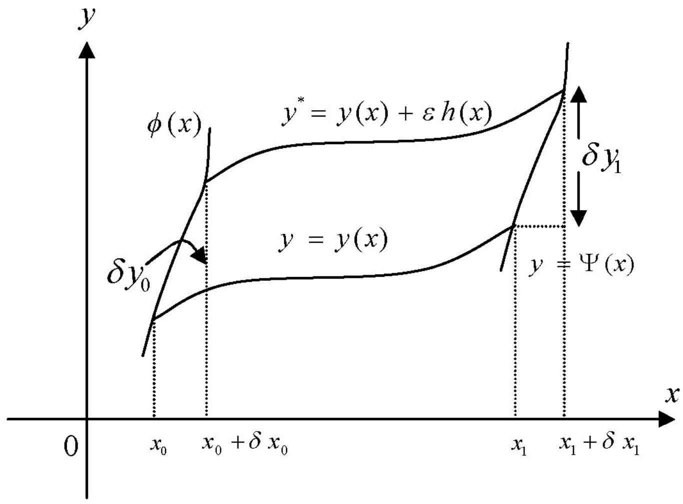
إذاً $b = r(\pi - Sin\pi) = r\pi$

وعليه فإن $r = \frac{b}{\pi}$ ، وبالتالي فإن المنحني المطلوب هو

$$x = \frac{b}{\pi}(\theta - Sin\theta) \quad ، \quad y = \frac{b}{\pi}(1 - Cos\theta)$$

ملاحظة:

لتحديد الشروط اللازمة لوجود منحنيات قيم قصوى للدالي $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\, dx$ في هذه الحالة ، نفرض أن (x_0, y_0) ، (x_1, y_1) تمثلان نقطتي النهاية للمنحني $y(x)$ ، وان (x_0, y_0) تتحرك على المنحني $y = \phi(x)$ بينما تتحرك (x_1, y_1) على المنحني $y = \Psi(x)$ ، ولنفرض أن $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ ، $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ تمثلان نقطتي النهاية للمنحني $y^* = y(x) + \varepsilon h(x)$ انظر شكل (٣-٣) .



شكل (٣- ٣) .

إذاً:

$$\Delta J[y] = J[y + \varepsilon h] - J[y]$$
$$= \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

وعليه فإن:

$$\Delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') - F(x, y, y')]\, dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\, dx$$

وبالتالي فإن:

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\, h(x) dx + \Big[F_{y'}\, h(x) + F\delta(x)\Big]_{x_0}^{x_1}$$

لكن من شكل (٤–٣) ، نجد أن:

$$h(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1)\, \delta x_1 \quad ، \quad h(x_0) = \delta y_0 - y'(x_0)\, \delta x_0$$

إذاً:

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\, h(x) dx + \Big[F_{y'}\, \delta y\Big]_{x_0}^{x_1} + (F - F_{y'y'})\, \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} \qquad \ldots (1)$$

وتسمى المعادلة (1) التغير العام (general variation) للدالي $J[y]$.

وعندما يكون للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على $y(x)$ نجد أن $\delta J = 0$ وعليه فإن:

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\, h(x)dx \;+\; F_{y'}\,\delta\, y\Big|_{x_0}^{x_1} + (F - F_{y'y'})\;\delta\, x\Big|_{x_0}^{x_1} \;=\; 0$$

لكن $\delta\, y_1 = \left(\phi^1(x_1) + \varepsilon_1\right)\delta\, x_1$ ، $\delta\, y_0 = \left(\phi^1(x_0) + \varepsilon_0\right)\delta\, x_0$

و $\delta\, x_1 \to 0$ عندما $\varepsilon_1 \to 0$ ، $\delta\, x_0 \to 0$ عندما $\varepsilon_0 \to 0$

وبالتالي فإن $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \;=\; 0$ ،

$$[F_{y'}\Psi' + F - y'F_{y'}]_{x=x_1}\,\delta\, x_1 \;-\; (F_{y'}\phi' + F - y'F_{y'})\Big|_{x=x_0}\delta\, x_0 \;=\; 0 \qquad \ldots\ (2)$$

وحيث ان $\delta\, x_0$ ، $\delta\, x_1$ مستقلتين عن بعضهما ، إذاً (2) تعني أن:

$$F_{y'}\phi' + F - y'F_{y'}\Big|_{x\,=\,x_0} \;=\; 0 \text{ ،}$$

$$F_{y'}\Psi' + F - y'F_{y'}\Big|_{x\,=\,x_1} \;=\; 0$$

وعليه فإن:

$$\left.\begin{array}{l} F \;+\; (\phi' - y')\,F_{y'}\Big|_{x\,=\,x_0} \;= 0 \\ F \;+\; (\Psi' - y')\,F_{y'}\Big|_{x\,=\,x_1} \;= 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ (3)$$

والتي يطلق عليها الشروط الاعتراضية (Transversality Conditions). إذاً لحل كل مسائل التغيرات من هذا النوع ، يجب أن تحل معادله اويلر ـــ لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \;=\; 0$ ، ثم تستخدم الشروط الاعتراضية (3) لإيجاد الثوابت الواردة في حل معادله اويلر ـــ لاجرانج.

والآن إلى واحد من أهم التطبيقات في هذا المجال وهو اشتقاق معادلة هاملتون – جاكوبي **Hamilton – Jacobi Equation**

وللوصول إلى هدفنا، نعتبر أن:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\; dx \qquad \ldots\ (1)$$

معرفاً على المنحنيات الواقعة في منطقه R ، وان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى واحده على المنحنى المار بالنقطتين A, B ، ولنسمي التكامل $S \;=\; \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\; dx$ والمحسوب على منحنى القيم القصوى الواصل بين $A\,(x_0\,, y_1^0)$ ، $B\,(x_1\,, y_1^1)$ اقصر بعد (geodetic distance) بين A ، B، فمن الواضح أن S داله وحيده القيمة (single valued function) للإحداثيات A ، B.

مثال٣-١ :

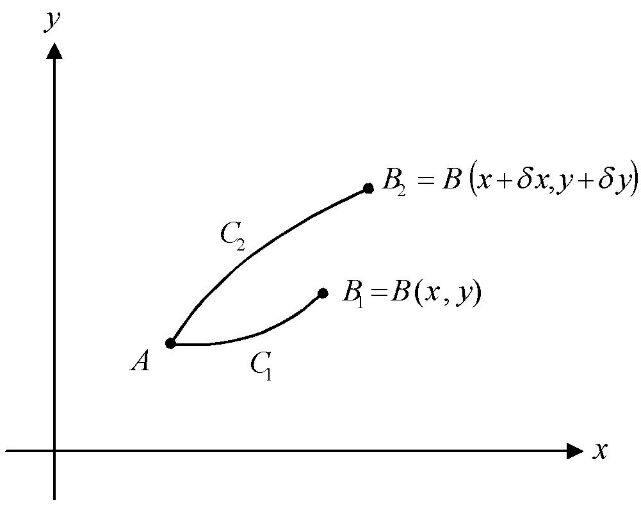
(أ) إذا كانت J تمثل طول القوس ، فان S تمثل البعد بين A,B .

(ب) إذا كانت dt $T=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{v}$ ، $v=v(x,y,z,x',y',z')$ سرعة الجسم عند أي نقطه والتي تعتمد على إحداثيات تلك النقطة واتجاهها ، فان S تمثل الزمن الذي يستغرقه الجسم لانتقال من A إلى B.

والآن لنفرض أن $A=(a,y_a)$ نقطه ثابتة بينما، $B=(x,y)$ نقطه متحركة إذا $S=S(x,y)$ داله معتمده على B فقط . ولإيجاد المعادلة التفاضلية التي تكون S حلاً لها ، يجب أن نحسب $\frac{\partial S}{\partial x}$ ، $\frac{\partial S}{\partial y}$ من العلاقة :

$$\Delta S = S(x+\delta x, y+\delta y)$$

لكن $\Delta J = J[c_2]-J[c_1]$ ، حيث c_1 هو منحنى القيم القصوى الواصل بين $A=(a,y_a)$ ، $B=(x,y)$ ، أما c_2 فهو منحنى القيم القصوى الواصل بين A، $B(x+\delta x,y+\delta y)$ ، شكل (٣-٤). إذاً $ds=\delta J$. لكن $\delta J = P\delta y - H\delta x \Big|_{x=a}^{x=b}$ ، حيث H داله هاملتون.



شكل (٣- ٤)

إذاً :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H \quad , \frac{\partial S}{\partial y} = P \qquad \dots (1)$$

حيث $P=P(x,y)=F_{y'}$ ، $H=H(x,y,p(x,y))=P_{y'}-F$ ومن (١)نجد أن S يجب أن تحقق العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0 \qquad \dots (2)$$

والتي يطلق عليها معادله هاملتون – جاكوبي.

ملاحظة:

إذا كانت $S = S(x, y, \alpha)$ حلاً لمعادله هاملتون –جاكوبي، حيث α ثابت التكامل عند الحل، فان $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ ثابت على كل المنحنيات الحرجة (منحنيات القيم القصوى)، $y = y(x)$ للدالي $J[y]$.

مثال ٣-٢:

حل معادله هاملتون – جاكوبي المناظرة للدالي

$$J[y] = \int_a^b y'^2 \quad dx$$

الحل:

بما أن $F(x, y, y') = y'^2$ ، $P = F_{y'} = 2y'$ ، إذاً داله هاملتون هي:

$$H(x, y, p) = Py' - F = \frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2$$

وعليه فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial y})^2 = 0$$

وهي معادله تفاضلية جزئيه غير متجانسة من الرتبة الأولى، ولحلها نفرض أن: $S = u(x) + v(y)$ ، إذاً $\frac{du}{dx} + \frac{1}{4}(\frac{dv}{dy})^2 = 0$ ، وعليه فإن، $\frac{du}{dx} = c$ ، لأن $\frac{du}{dx}$ لا تعتمد على y و $(\frac{dv}{dy})^2$ لا يعتمد على x. إذاً $u = -\alpha^2 x$ ، حيث α ثابت، وعليه فإن $-\alpha^2 + \frac{1}{4}(\frac{dv}{dx})^2 = 0$ ، وبالتالي فإن، $\frac{dv}{dy} = 2\alpha$ ، وعليه فإن $v = 2\alpha y + \beta$ ، إذاً $S = -\alpha^2 x + 2\alpha y + \beta$ حل لمعادله هاملتون جاكوبي . لكن من الملاحظة أعلاه ، نجد أن $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = K$ ، إذاً $y = \alpha x + a$ ، $\frac{\partial S}{\partial \beta} = K_1$ وعليه فإن منحنى القيم القصوى هي خط مستقيم.

مثال ٣-٣:

أوجد معادله اقصر مسار على سطح فيه

$$dS = \sqrt{[\phi_1(x)+\phi_2(y)]\ (dx^2+dy^2)}$$

الحل:

بما أن: $J[y] = \int_a^b \sqrt{[\phi_1(x)+\phi_2(y)]\quad(1+y'^2)}\ dx$

إذاً: $H = \dfrac{\sqrt{\phi_1(x)+\phi_2(4)}}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{\phi_1(x)+\phi_2(y)}\ ,\ \sqrt{1-P^2}$

حيث $H^2+P^2 = \phi_1(x)+\phi_2(y)$ ، $P = \dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$

وعليه فإن معادله هاملتون – جاكوبي هي:

$$(\frac{\partial P}{\partial x})^2 + (\frac{\partial P}{\partial y})^2 = \phi_1(x)+\phi^2(y) \quad \text{أو} \quad (\frac{\partial P}{\partial x})^2 - \phi_1(x) = \phi_2(y) - (\frac{\partial P}{\partial y})^2$$

وهي معادله تفاضلية جزئية ذات متغيرات منفصلة، وعند وضع:

$$(\frac{\partial P}{\partial x})^2 - \phi_1(x) = \alpha \quad ، \quad \phi_2(y) - (\frac{\partial P}{\partial y})^2 = \alpha$$

نجد أن:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{\phi_1(x)+\alpha} \quad ، \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \sqrt{\phi_2(y)-\alpha}$$

وعليه فإن:

$$P = \int \sqrt{\phi_1(x)+\alpha}\ dx + \int \sqrt{\phi_2(y)-\alpha}\ dy$$

إذاً معادله اقصر مسار هو المستقيم $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \beta$ على الشكل:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\phi_1(x)+\alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{\phi_2(y)-\alpha}} = \beta$$

المراجع:

Akhiezer N. I., 962, The Calculus of variation (translated by A . H . Frank) Blasdell publishing co. New York.

Arthurs A. M., 1975, Calculus of variations, Rutledge and Kegan Paul, London and Boston.

Bliss G. A., 1962, Calculus of Variations, Open Court publishing Co., Chicago.

Boas M., Mathematical methods in The Physical Science, John Wiley and Sons.

Courant R. and Hilbert D., 1953, Methods of Mathematical Physics, **1**, Interscience Publishing Co. New York.

Crags J. W., 1973, Calculus of Variations, George Allen and Unwin Ltd., London.

Dreyfus S. E., 1965, Dynamic Programming and The Calculus of Variations, Academic Press.

Elsgolts L., 1970, Differential Equations and the Calculus of Variations, Mir Publishers, Moscow.

Gelfand I. M and Fomin S . V., 1963, Calculus of Variations (Translated and Edited by R. A. Silverman) Prentice Hall, Englewood, New Jersey.

Koo D ., 1977, Elements of Optimization, Springer – Verlag, New York, Berlin.

Leitmann G., 1981, The Calculus of Variations and Optimal Control, Plenum Press New York and London.

Simon G. F., 1984, Differential Equations with Applications and Historical notes, Tata McGraw Hill, New Delhi.

Smith D. R., 1974, Variational Methods in Optimization, Prentice Hall, Englewood, New Jersey.

Received 22/11/1428 (01/12/2007) Accepted 12/06/1429 (16/06/2008)